



University of the Pacific Scholarly Commons

Euler Archive - All Works

Euler Archive

1798

Methodus facilis inveniendi series per sinus sosinusve angulorum multiplorum procedentes, quarum usus in universa theoria astronomiae est amplissimus

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>



Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Methodus facilis inveniendi series per sinus sosinusve angulorum multiplorum procedentes, quarum usus in universa theoria astronomiae est amplissimus" (1798). *Euler Archive - All Works*. 703.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/703>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

METHODVS FACILIS
INVENIENDI SERIES PER SINVS COSINVSVE
ANGVLORVM MULTIPLORVM PROCEDENTES,
QVARVM VSVS IN VNIVERSA
THEORIA ASTRONOMIAE
EST AMPLISSIMVS.

Auctore
L. EVLERO.

Conventui exhibita die 26 Maii 1777.

§. 1.

Notum est in Astronomiae theoria omnes expressiones Analyticas in huiusmodi series converti solere, quarum termini five per sinus five cosinus multiplo- rum cuiuspiam anguli procedant. Veluti in motu planetarum regulari, si anomalia vera fuerit $= \Phi$, orbitae excentricitas $= e$ et semiparameter $= b$, distantia planetae a sole est $= \frac{b}{1 + e \cos. \Phi}$, quae formula in talem seriem:

$$A + B \cos. \Phi + C \cos. 2 \Phi + D \cos. 3 \Phi + E \cos. 4 \Phi + \text{etc.}$$

evolvi solet, propterea quod eius usus in tabulis Astronomi- cis condendis maximum adiumentum affert. Deinde etiam expressio temporis tali formula integrali: $\int \frac{\partial \Phi}{1 + e \cos. \Phi} d\Phi$ expressa in huiusmodi seriem converti convenit. Ac si omnia elementa per

per anomaliam mediam exprimere velimus, quae fit $= \theta$, totum negotium, quod non parum laboris postulat, semper ad inventionem talis seriei:

$$A + B \cos. \theta + C \cos. 2 \theta + D \cos. 3 \theta + E \cos. 4 \theta + \text{etc.}$$

reducitur; unde deinceps, sive per differentiationem, sive per integrationem, similes series sinus eorundem angulorum multiplo-
rum eliciuntur.

§. 2. Quin etiam pro investigatione motuum irregularium, qui oriuntur ex mutua planetarum actione, cardo rei in evolutione idonea huiusmodi formulae: $(1 + a \cos. \Phi)^{-\frac{3}{2}}$ versari solet, quam formulam pariter in eiusmodi seriem:

$$A + B \cos. \Phi + C \cos. 2 \Phi + D \cos. 3 \Phi + \text{etc.}$$

evolvi convenit, ubi Φ denotat angulum, quo bini planetae se mutuo attrahentes, ex sole visi, distare a se invicem videntur. Tum vero etiam si tales investigationes ulterius prosequi velimus, occurrunt quoque altiores potestates, veluti $(1 + a \cos. \Phi)^{-\frac{5}{2}}$ et $(1 + a \cos. \Phi)^{-\frac{7}{2}}$ etc. quarum evolutio in tales series profundissimas investigationes et calculos plerumque valde taediosos postulat. Evenire quoque potest in huiusmodi investigationibus ut formulae irrationales adhuc magis complicatae in calculum invehantur, quas simili modo in tales series evolvi oporteat.

§. 3. Cum igitur talium formularum evolutio non solum in Astronomia maximi sit momenti, sed etiam per methodos vulgo usitatas summum laborem exigant, aliam methodum novam ac facilem proponam, cuius ope omnes
huius-

huiusmodi formulae, quantumvis fuerint perplexae, facili labore in tales series converti queant. Loquor autem hic potissimum de eiusmodi formulis, quae more solito in huiusmodi series resolvuntur;

$$\alpha + \beta \cos. \Phi + \gamma \cos. \Phi^2 + \delta \cos. \Phi^3 + \varepsilon \cos. \Phi^4 + \text{etc.}$$

cuius scilicet termini per potestates ipsius $\cos. \Phi$ procedant. Quoniam enim quaelibet potestas ipsius $\cos. \Phi$ in cosinus multiplo- rum eiusdem anguli evolvi potest, evidens est per evolutionem singulorum terminorum seriem eiusdem formae oriri debere, qualem hic tractare constitui.

§. 4. Quaecunque autem formula hoc modo evol- venda proponatur, quoniam eam semper ut certam functio- nem anguli Φ spectare licet, eam more iam recepto hoc charactere $\Gamma : \Phi$ designabo, quam quidem functionem ita comparatam esse assumo, ut more solito in talem seriem:

$$\alpha + \beta \cos. \Phi + \gamma \cos. \Phi^2 + \delta \cos. \Phi^3 + \varepsilon \cos. \Phi^4 + \text{etc.}$$

evolvi queat; quam tamen in praesenti negotio exhibere nihil attinet. Generaliter igitur statuamus fieri

$$\Gamma : \Phi = A + B \cos. \Phi + C \cos. 2 \Phi + D \cos. 3 \Phi + E \cos. 4 \Phi + \text{etc.}$$

ita ut totum negotium iam huc redeat, quemadmodum va- lores litterarum $A, B, C, D, \text{etc.}$ investigari oportet, id quod methodo, quam hic sum expositurus, sine ullis calculi ambagibus praestari poterit.

§. 5. Ante autem quam hoc negotium adgrediar, plurimum intererit observasse, istas litteras necessario seriem valde convergentem constituere debere, ita ut quo longius procedamus, earum valores continuo magis decrescant. Quo-
niam

niam
ipse
titur
in h
minu
= M
perif
nus
lor a
muta
illam
multo
maior
minis
quide
A, B
fionei

ta ac
qui l
mo si

Sin a

unde

ubi t
 $\Phi =$
No

niam enim, si angulus Φ exigua particula augeatur, etiam ipse valor functionis $\Gamma : \Phi$ tantum parvam mutationem patitur, facile ostendi potest, litteram verbi gratia millesimam in hoc ordine valde parvam esse debere. Namque si iste terminus fuerit $M \cos. 1000 \Phi$, eius valor pro casu $\Phi = 0$ erit $= M$. Augeamus nunc hunc angulum millesima parte semiperipheriae π , eritque $1000 \Phi = \pi$, ideoque iste terminus $= -M$, ita ut facta hac exigua mutatione eius valor a $+M$ usque ad $-M$ immutetur. Vnde patet, ne ista mutatio in valore functionis $\Gamma : \Phi$ enorme discrimen pariat, illam litteram M vehementer parvam esse debere, id quod multo magis evenire debet in litteris quae cosinus adhuc maiorum multiplosum afficiunt. Haec autem tantum a terminis ab initio maxime remotis sunt intelligenda, quandoquidem utique evenire potest, ut ab initio seriei termini A, B, C, D, E , etc. adeo crescendo procedant, et progressionem maxime regularem constituent.

§. 6. Quoniam igitur functio proposita $\Gamma : \Phi$ pro data accipitur, eius valores pro quolibet angulo determinato, qui loco Φ assumitur, actu exhiberi poterunt. Hinc si primo sumamus $\Phi = 0$, erit

$$\Gamma : 0 = A + B + C + D + E + \text{etc.}$$

Sin autem sumamus $\Phi = \pi$, erit

$$\Gamma : \pi = A - B + C - D + E - F + \text{etc.}$$

unde sequitur fore

$$\frac{1}{2} \Gamma : 0 + \frac{1}{2} \Gamma : \pi = A + C + E + G + I + \text{etc.}$$

ubi termini alterni iam sunt exclusi. Statuamus nunc $\Phi = \frac{\pi}{2}$, eritque

Nova Acta Acad. Imp. Scient. Tom. XI.

N

$\Gamma :$

$$\Gamma: \frac{\pi}{2} = A - C + E - G + I - L + N - \text{etc.}$$

Quare si ista series ad praecedentem addatur, semisumma ambarum erit

$$\frac{1}{4}\Gamma: 0 + \frac{1}{4}\Gamma: \pi + \frac{1}{2}\Gamma: \frac{\pi}{2} = A + E + I + N + Q + \text{etc.}$$

ficque valor ipsius A iam prope innotesceret, si litteras sequentes E, I, N etc. negligere vellemus.

§. 7. Quoniam hoc modo saltus ab A usque ad E est factus, simili modo saltus adhuc ampliores effici poterunt. Sumamus enim $\Phi = \frac{\pi}{4}$, et ponamus brevitatis gratia $\cos. \frac{\pi}{4} = a$, unde fit $\cos. \frac{3\pi}{4} = -a$; $\cos. \frac{5\pi}{4} = -a$; $\cos. \frac{7\pi}{4} = a$; etc. eritque

$$\Gamma: \frac{1}{4}\pi = A + aB - aD - E - aG + aI + K + aL \text{ etc.}$$

Faciamus nunc $\Phi = \frac{3}{4}\pi$, ac reperiemus

$$\Gamma: \frac{3}{4}\pi = A - aB + aD - E + aG - aI + K - aL \text{ etc.}$$

Harum igitur duarum serierum semisumma erit

$$\frac{1}{2}\Gamma: \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\Gamma: \frac{3}{4}\pi = A - E + K - N + R \text{ etc.}$$

Quodsi ergo huic seriei addamus eam, quam paragrapho praecedente invenimus, erit

$$\frac{1}{8}\Gamma: 0 + \frac{1}{8}\Gamma: \pi + \frac{1}{4}\Gamma: \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\Gamma: \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\Gamma: \frac{3}{4}\pi = A + I + R + \text{etc.}$$

quae expressio iam multo propius dabit verum valorem ipsius A, ob parvitatem terminorum sequentium.

§. 8. Simili modo ex valoribus $\Phi = \frac{1}{8}\pi$; $\Phi = \frac{3}{8}\pi$; $\Phi = \frac{5}{8}\pi$ et $\Phi = \frac{7}{8}\pi$, series colligi poterit $A - I + R$, etc. quae cum illa coniuncta dabit $A + R$ etc. unde iam satis tuto verus valor ipsius A resultabit. Verum quia hoc modo procedendo mox totum alphabetum exhaustiremus, magis

ido-

idonea ratione litteras A, B, C, D, etc. designemus, unde statim liqueat, ad quodnam multipulum anguli Φ singulae referantur. Ponamus scilicet $A = (0)$; $B = (1)$; $C = (2)$; $D = (3)$; $E = (4)$; etc. hoc modo series posremo loco inventa erit

$$(0) + (8) + (16) + (24) + (32) + (40) + \text{etc.}$$

§. 9. Statuamus iam successive pro Φ angulos $\frac{1}{8}\pi$, $\frac{3}{8}\pi$; $\frac{5}{8}\pi$; $\frac{7}{8}\pi$; ac ponendo brevitatis gratia $\text{col. } \frac{1}{8}\pi = \beta$; $\text{col. } \frac{3}{8}\pi = b$, ut sit $\beta\beta + bb = 1$, erit $\text{col. } \frac{5}{8}\pi = -b$; $\text{col. } \frac{7}{8}\pi = -\beta$; $\text{col. } \frac{9}{8}\pi = -\beta$; $\text{col. } \frac{11}{8}\pi = -b$; $\text{col. } \frac{13}{8}\pi = +b$; $\text{col. } \frac{15}{8}\pi = +\beta$; $\text{col. } \frac{17}{8}\pi = \beta$; $\text{col. } \frac{19}{8}\pi = b$; etc. tum vero series hinc resultantes erunt:

$$\begin{aligned} \Gamma: \frac{1}{8}\pi &= (0) + \beta(1) + \alpha(2) + b(3) + 0(4) - b(5) - \alpha(6) \\ &\quad - \beta(7) - 1(8) - \beta(9) - \alpha(10) - b(11) \\ &\quad - 0(12) + b(13) + \alpha(14) + \beta(15) + 1(16). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma: \frac{3}{8}\pi &= (0) + b(1) - \alpha(2) - \beta(3) + 0(4) + \beta(5) + \alpha(6) \\ &\quad - b(7) - 1(8) - b(9) + \alpha(10) + \beta(11) + 0(12) \\ &\quad - \beta(13) - \alpha(14) + b(15) + 1(16). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma: \frac{5}{8}\pi &= (0) - b(1) - \alpha(2) + \beta(3) + 0(4) - \beta(5) + \alpha(6) \\ &\quad + b(7) - 1(8) + b(9) + \alpha(10) - \beta(11) + 0(12) \\ &\quad + \beta(13) - \alpha(14) - b(15) + 1(16). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma: \frac{7}{8}\pi &= (0) - \beta(1) + \alpha(2) - b(3) + 0(4) + b(5) - \alpha(6) \\ &\quad + \beta(7) - 1(8) + \beta(9) - \alpha(10) + b(11) - 0(12) \\ &\quad - b(13) + \alpha(14) - \beta(15) + 1(16). \end{aligned}$$

Iam harum quatuor serierum summa per quatuor divisa erit

$(0) - (8) + (16) - (24) + (32) - (40) + (48) - (56)$ etc.
cuius ergo summa erit

$$\frac{1}{4}\Gamma : \frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\Gamma : \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{4}\Gamma : \frac{5}{8}\pi - \frac{1}{4}\Gamma : \frac{7}{8}\pi.$$

§. 10. Quodsi ergo huic seriei addatur illa, quae
§. 8. fuerat inventa, divisione facta per 2 habebimus

$$(0) + (16) + (32) + (48) + (64) + \text{etc.}$$

cuius ergo valor erit

$$\begin{aligned} \frac{1}{16}\Gamma : 0 + \frac{1}{16}\Gamma : \pi + \frac{1}{8}\Gamma : \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{8}\Gamma : \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{8}\Gamma : \frac{5}{4}\pi + \frac{1}{8}\Gamma : \frac{3}{2}\pi \\ + \frac{1}{8}\Gamma : \frac{7}{8}\pi + \frac{1}{8}\Gamma : \frac{5}{8}\pi + \frac{1}{8}\Gamma : \frac{7}{8}\pi. \end{aligned}$$

Quodsi porro angulos $\frac{1}{16}\pi$; $\frac{3}{16}\pi$; usque ad $\frac{15}{16}\pi$,
subsidium vocare vellemus, serierum inde natarum summa
per 8 divisa produceret seriem hanc:

$$(0) - (16) + (32) - (48) + (64) \text{ etc.}$$

quae cum praecedente coniuncta praebitura esset hanc
seriem: $(0) + (32) + (64) + (96) + \text{etc.}$ quae manifesto
satis exacte valorem primi termini $(0) = A$ praebit.
terim tamen nihil impedit, quo minus similes operationes
ulterius prosequamur.

§. 11. Hoc autem modo tantum ad cognitionem
primi termini A pertingimus; at inventio secundi termini
B, pariter ac sequentium C, D, E, etc. ex iisdem quidem
casibus, sed per longe alias combinationes, pluresque ambiguitates,
concludi posset; quod cum nimis amplam descriptionem
postularet, plurimum intererit, certam et constantem
methodum attulisse, cuius beneficio per similes formulae
non solum primus terminus A, sed etiam omnes sequentes
B, C, D, E, etc. tam exacte quam lubuerit indagari quod
an

ant. Omnes autem operationes instituendae innituntur sequenti Lemmati:

Lemma.

Si proposita fuerit ista series cosinuum:

$$1 + \cos. \phi + \cos. 2\phi + \cos. 3\phi + \cos. 4\phi \dots \cos. n\phi,$$

cuius ultimi termini angulus sit multipulum semipexiphæriæ π , invenire summam huius seriei.

Solutio.

§. 12. Ponamus summam quaesitam $= S$, ut sit

$$S = 1 + \cos. \phi + \cos. 2\phi + \cos. 3\phi \dots \cos. n\phi,$$

et multiplicando per $\sin. \frac{1}{2}\phi$, ob

$$2 \sin. \frac{1}{2}\phi \cos. m\phi = \sin. (m + \frac{1}{2})\phi - \sin. (m - \frac{1}{2})\phi,$$

nanciscemur:

$$\begin{aligned} 2 S \sin. \frac{1}{2}\phi &= 2 \sin. \frac{1}{2}\phi + \sin. \frac{3}{2}\phi + \sin. \frac{5}{2}\phi + \sin. \frac{7}{2}\phi \dots \sin. (n + \frac{1}{2})\phi, \\ &\quad - \sin. \frac{1}{2}\phi - \sin. \frac{3}{2}\phi - \sin. \frac{5}{2}\phi - \sin. (n - \frac{1}{2})\phi, \end{aligned}$$

ita ut sit

$$2 S \sin. \frac{1}{2}\phi = \sin. \frac{1}{2}\phi + \sin. (n + \frac{1}{2})\phi.$$

Quodsi iam fuerit $n\phi = \pi$, ultimus terminus erit

$$\sin. (\pi + \frac{1}{2})\phi = -\sin. \frac{1}{2}\phi,$$

ideoque $2 S \sin. \frac{1}{2}\phi = 0$, quod idem valet si fuerit $n\phi$ vel 3π , vel 5π , vel in genere $(2i - 1)\pi$; sin autem fuerit $n\phi = 2\pi$, ultimus terminus erit $= \sin. \frac{1}{2}\phi$, ideoque summa seriei erit $= 1$.

§. 13. Duo igitur casus hic occurrunt distinguendi, prouti ferit vel $n\phi = (2i - 1)\pi$, vel $n\phi = 2i\pi$. Priori
scili-

scilicet casu summa erit $= c$; posteriore vero casu $= 1$. Interim tamen hae conclusiones quasdam exceptiones postulant, quando angulus $\frac{1}{2}\Phi$ iam ipse fuerit vel c , vel π , vel 2π , vel 3π , vel 4π ; horum enim casuum primo $\Phi = 0$ omnes termini seriei propositae erunt unitati aequales, quorum numerus cum sit $n + 1$, etiam summa erit $S = n + 1$. Hoc vero ipsum etiam ex solutione inventa concludi potest; cum enim per $2 \sin. \frac{1}{2}\Phi$ dividendo fit

$$S = \frac{1}{2} + \frac{\sin. (n + \frac{1}{2}) \Phi}{2 \sin. \frac{1}{2} \Phi},$$

casu quo Φ infinite parvum, ideoque $\sin. (n + \frac{1}{2}) \Phi = (n + \frac{1}{2}) \Phi$ et $\sin. \frac{1}{2} \Phi = \frac{1}{2} \Phi$, his valoribus substitutis reperitur $S = n + 1$.

§. 14. Evolvamus nunc casum quo $\frac{1}{2}\Phi = \pi$, et quia in expressione nostra etiam nunc postremae fractionis numerator et denominator evanescunt, eorum loco substituantur sua differentialia, eritque

$$S = \frac{1}{2} + \frac{(n + \frac{1}{2}) \cos. (n + \frac{1}{2}) \Phi}{\cos. \frac{1}{2} \Phi},$$

unde ob $\cos. \frac{1}{2}\Phi = -1$ et $\cos. (n + \frac{1}{2}) \Phi = \cos. (2n\pi + \pi) = -1$, erit $S = n + 1$; id quod etiam evenit in genere, si fuerit $\frac{1}{2}\Phi = \lambda\pi$, tum enim erit

$$S = \frac{1}{2} + (n + \frac{1}{2}) \frac{\cos. 2n\lambda\pi + \lambda\pi}{\cos. \lambda\pi}.$$

Est vero $\cos. (2\lambda n\pi + \lambda\pi) = \cos. \lambda\pi$, unde erit $S = n + 1$. Hinc ergo sequuntur istae duae conclusiones:

I. Pro casibus $n\Phi = (2i - 1)\pi$.

His casibus summa seriei propositae semper est nihilo aequalis, exceptis casibus, quibus $\Phi = 2i\pi$, scilicet multipulum totius peripheriae, quippe quibus summa seriei semper est $= n + 1$.

II. Pro casibus $n\Phi = 2i\pi$.

Pro his casibus summa seriei propositae semper est $= 1$, nisi fuerit $\Phi = 2i\pi$, scilicet multiplo totius peripheriae aequalis; quandoquidem his casibus summa est $= n + 1$.

§. 15. Ponamus brevitatis gratia $\frac{\pi}{n} = \omega$, atque huius progressionis:

$$1 + \cos. \omega + \cos. 2\omega + \dots + \cos. \pi$$

cuius terminorum numerus est $n + 1$, summa semper erit $= 0$; at vero si singuli anguli duplicentur, huius expressionis:

$$1 + \cos. 2\omega + \cos. 4\omega + \dots + \cos. 2\pi,$$

vi Lemmatis, summa semper est $= 1$. Sin autem angulos hos per numerum quemcunque λ multiplicemus, ut prodeat haec series:

$$1 + \cos. \lambda\omega + \cos. 2\lambda\omega + \dots + \cos. \lambda\pi$$

eius summa semper erit $= 0$, si λ fuerit numerus impar; sin autem fuerit par, eius summa erit $= 1$, exceptis tamen casibus, quibus est vel $\lambda = 2n$, vel $\lambda = 4n$, vel $\lambda = 6n$, etc. quippe quibus summa erit $= 1 + n$, quoniam secundus terminus erit $\cos. 2n\omega = \cos. 2\pi$. Hinc iam sequentis problematis solutio dari potest.

Problema.

Posito $\frac{\pi}{n} = \omega$, si proponatur ista progressio:

$$\Gamma : 0\omega + \Gamma : \omega + \Gamma : 2\omega + \Gamma : 3\omega + \dots + \Gamma : \pi,$$

cuius

cuius terminorum numerus est $n + 1$, eius summam, quae ponatur $= S$, definire.

Solutio.

§. 16. Quoniam in genere series ex formula $\Gamma : \Phi$ posita est

$(0) + (1)\text{cof. } \Phi + (2)\text{cof. } 2\Phi + (3)\text{cof. } 3\Phi + (4)\text{cof. } 4\Phi + \text{etc.}$
pro prima formula est $\Phi = 0$; pro secunda $\Phi = \omega$; pro tertia $\Phi = 2\omega$; etc. Hinc ergo ex singulis formulis, series, quae inde nascuntur, verticaliter subscribamus, ita ut prima series horizontalis exhibeat terminos coëfficiente (0) affectos; secunda terminos coëfficiente (1) affectos; tertia coëfficienti (2) respondentes; etc. sequenti modo:

	$\Gamma : 0\omega$	$\Gamma : \omega$	$\Gamma : 2\omega$	$\Gamma : 3\omega$	$\Gamma : 4\omega$	$\Gamma : 5\omega$	$\Gamma : 6\omega$	$\Gamma : 7\omega$	$\Gamma : 8\omega$	$\Gamma : 9\omega$	$\Gamma : 10\omega$	$\Gamma : \pi$
(0)	1	+1	+1	+1								+1
(1)	1+	cof. ω	+cof. 2ω	+cof. 3ω								+cof. π
(2)	1+	cof. 2ω	+cof. 4ω	+cof. 6ω								+cof. 2π
(3)	1+	cof. 3ω	+cof. 6ω	+cof. 9ω								+cof. 3π
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
(λ)	1+	cof. $\lambda\omega$	+cof. $2\lambda\omega$	+cof. $3\lambda\omega$								+cof. $\lambda\pi$

§. 17. Nunc igitur vi lemmatis summa primae seriei horizontalis erit $= (1 + n)(0)$; secundae vero summa erit $= 0$; tertiae $= (2)1$; tum vero omnium coëfficientium imparium summae evanescunt, parium vero summae unitati aequantur, exceptis coëfficientibus $(2n)$; $(4n)$; $(6n)$; $(8n)$ etc. quorum valores erunt $= n + 1$, ficque summa quaesita ita exhiberi poterit:

$$S = (1 + n)(0) + (n + 1)(2n) + (n + 1)(4n) \text{ etc.} \\ + 1(2) + 1(4) + 1(6) + \text{etc.}$$

Scilicet pro coëfficiente generali (λ) termini tantum occurrunt, quando λ est numerus par, quorum valor est $= 1$, exceptis casibus, quibus est $\lambda = 2n$; vel $\lambda = 4n$; vel $\lambda = 6n$; etc. quippe pro quibus habemus $n = 1$,

§. 18. Consideremus nunc aggregata primi et ultimi termini cuiusque seriei horizontalis, sive factorem formae $\Gamma:0 + \Gamma:\pi$, ac pro (c) prodit 2; pro (1) fiet $= c$; pro (2) iterum prodit 2; atque ita porro pro omnibus imparibus oritur 0, pro paribus vero 2; unde manifestum est fore

$$\frac{1}{2}\Gamma:0 + \frac{1}{2}\Gamma:\pi = (0) + (2) + (4) + (6) + (8) + \text{etc.}$$

ideoque omnes coëfficientes pares hic occurrunt, sine ulla exceptione. Quam ob rem si hanc seriem a valore ante pro S invento subtrahamus, omnes termini sola unitate affecti tolluntur, atque habebimus sequentem seriem memorabilem pro forma $S - \frac{1}{2}\Gamma:0 - \frac{1}{2}\Gamma:\pi$, quae erit

$$n(0) + n(2n) + n(4n) + n(6n) + \text{etc.}$$

unde sequens theorema:

Theorema.

Si in expressione praecedentis problematis primi et postremi termini tantum semissis capiatur, ita ut habeatur ista forma:

$$\frac{1}{2}\Gamma:0 + \Gamma:\omega + \Gamma:2\omega + \dots + \frac{1}{2}\Gamma:\pi = \Sigma,$$

existente $\omega = \frac{\pi}{n}$, eius valor per sequentem seriem infinitam exprimetur:

$$\Sigma = n(0) + n(2n) + n(4n) + n(6n) + n(8n) + \text{etc.}$$

§. 19. Quicumque ergo numerus integer pro n accipiat, si ponatur $\frac{\pi}{n} = \omega$, huius seriei infinitae:

$(0) + (2n) + (4n) + (6n) + (8n) + \text{etc.}$
 summa erit $= \frac{1}{n} \Sigma$, existente

$$\Sigma = \frac{1}{2} \Gamma:0 + \Gamma:\omega + \Gamma:2\omega + \Gamma:3\omega + \dots + \frac{1}{2} \Gamma:\pi.$$

Ita si sumamus $n = 12$, posito $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$, ita ut sit

$$\Sigma = \frac{1}{2} \Gamma:0 + \Gamma:\omega + \Gamma:2\omega + \Gamma:3\omega + \dots + \frac{1}{2} \Gamma:\pi,$$

eius pars duodecima, scilicet $\frac{1}{12} \Sigma$, exprimet summam huius seriei: $(0) + (24) + (48) + (72) + \text{etc.}$ Quare quia termini post primum sunt valde parvi, illa formula $\frac{1}{12} \Sigma$ satis exakte exhibebit valorem formulae (0), qui initio per litteram A est indicatus.

§. 20. Cum igitur hoc modo valor primi termini A, quem hic per (0) designamus, tam exakte definiri queat quam lubuerit, (tantum enim opus est pro n numeros maiores accipere), ostendamus etiam quomodo simili ratione valor secundi termini $B = (1)$ investigari possit; quem in finem considerari conveniet istam expressionem:

$S = \Gamma:0 + \cos \omega \Gamma:\omega + \cos 2\omega \Gamma:2\omega + \cos 3\omega \Gamma:3\omega + \dots + \cos \pi \Gamma:\pi$,
 existente iterum $\omega = \frac{\pi}{n}$, ita ut terminorum numerus sit $= 1 + n$.
 Evolvamus igitur huius expressionis membrum quodcunque $\cos \lambda \omega \Gamma:\lambda \omega$, et cum sit

$\Gamma:\lambda \omega = (0) + (1) \cos \lambda \omega + (2) \cos 2\lambda \omega + (3) \cos 3\lambda \omega + \text{etc.}$
 erit

$$\begin{aligned} 2 \cos \lambda \omega \Gamma:\lambda \omega &= 2(0) \cos \lambda \omega + (1)(1 + \cos 2\lambda \omega) \\ &+ (2)(\cos \lambda \omega + \cos 3\lambda \omega) + (3)(\cos 2\lambda \omega + \cos 4\lambda \omega) \\ &+ (4)(\cos 3\lambda \omega + \cos 5\lambda \omega) + \text{etc.} \end{aligned}$$

§. 21. Quodsi iam hoc modo singulis terminis propositis bis sumtis series inde resultantes verticaliter sub-
scribamus, erit ut sequitur:

$$2S = 2\Gamma:0 + 2\cos\omega\Gamma:\omega + 2\cos 2\omega\Gamma:\cos 2\omega \dots + 2\cos \pi\Gamma:\pi.$$

(0)	2 + 2 cos. ω	+ 2 cos. 2 ω	+ 2 cos. π
(1)	1 + 1	+ 1	+ 1
	1 + cos. 2 ω	+ cos. 4 ω	+ cos. 2 π
(2)	1 + cos. ω	+ cos. 2 ω	+ cos. π
	+ 1 + cos. 3 ω	+ cos. 6 ω	+ cos. 3 π
(3)	1 + cos. 2 ω	+ cos. 4 ω	+ cos. 2 π
	+ 1 + cos. 4 ω	+ cos. 8 ω	+ cos. 4 π
(4)	1 + cos. 3 ω	+ cos. 6 ω	+ cos. 3 π
	+ 1 + cos. 5 ω	+ cos. 10 ω	+ cos. 5 π
.
.
.
(λ)	1 + cos. (λ-1) ω + cos. 2 (λ-1) ω	+ cos. (λ-1) π	
	+ 1 + cos. (λ+1) ω + cos. 2 (λ+1) ω	+ cos. (λ+1) π	

§. 22. Nunc ope Lemmatis supra expositi facile erit
singulas has progressioness summare. Scilicet pro (0) erit sum-
ma = 0, pariter ac summa primi et ultimi. At pro (1)
prioris seriei summa est 1 + n, posterioris vero summa est 1,
ita ut pro (1) iunctim prodeat 2 + n. At vero primus et
ultimus terminus simul dant 4, quorum semissis si inde au-
feratur, remanebit (1) n. Pro (2) superior series dat 0, et
inferior pariter 0, ita ut hic terminus prorsus evanescat. Pro
(3) superior series dat 1, inferior vero pariter 1, quare si
semisumma primi et ultimi hinc auferatur, etiam iste termi-
nus evanescit, id quod semper eveniet, nisi in secundis ter-
minis occurrat vel cos. 2 π ; vel cos. 4 π ; vel cos. 6 π ; etc.
quoniam tum seriei summa est 1 + n.

§. 23. Consideremus igitur indicem generalem (λ) pro quo superior series est:

$1 + \cos. (\lambda - 1) \omega + \cos. 2 (\lambda - 1) \omega + \dots + \cos. (\lambda - 1) \pi$
cuius summa, si fuerit $\lambda - 1 = 2n$, erit $1 + n$; inferioris autem seriei summa erit $1 + n$, quando fuerit $\lambda + 1 = 2n$. Hinc si semisumma primi et ultimi termini subtrahatur, utroque casu remanebit tantum n . Ex quo patet si perpetuo semisummam primi et ultimi termini subtrahamus, omnes terminos e medio tolli, praeter eos, quibus est vel $\lambda - 1 = 2in$ vel $\lambda + 1 = 2in$, denotante $2i$ numerum parem quemcunque, pro quibus valor erit $= n$, id quod ergo locum habet pro forma $2S - \Gamma : 0 - \cos. \pi \Gamma : \pi$. Quare si proponatur ista expressio:

$$\Sigma = \frac{1}{2} \Gamma : 0 + \cos. \omega \Gamma : \omega + \cos. 2 \omega \Gamma : 2 \omega + \cos. 3 \omega \Gamma : 3 \omega + \dots + \frac{1}{2} \cos. \pi \Gamma : \pi,$$

eius valor erit

$$\frac{1}{2} n (1) + \frac{1}{2} n (2n - 1) + \frac{1}{2} n (2n + 1) + \frac{1}{2} n (4n - 1) + \dots + \frac{1}{2} n (4n + 1) \text{ etc.}$$

unde concludimus huius seriei:

$$\left. \begin{aligned} &(1) + (2n - 1) + (4n - 1) + (6n - 1) + (8n - 1) \\ &+ (2n + 1) + (4n + 1) + (6n + 1) + (8n + 1) \end{aligned} \right\} \text{ etc.}$$

summam esse $\frac{2}{n} \Sigma$; unde si n fuerit numerus satis magnus, ista expressio $\frac{2}{n} \Sigma$ satis exaete praebebit valorem (1), quem supra littera B designavimus.

§. 24. Contemplemur hic quoque casum, quo $n = 12$ et $\omega = \frac{\pi}{12} = 15^\circ$, ideoque formula:

$$\Sigma = \frac{1}{2} \Gamma : 0 + \cos. \omega \Gamma : \omega + \cos. 2 \omega \Gamma : 2 \omega + \cos. 3 \omega \Gamma : 3 \omega + \dots + \frac{1}{2} \cos. \pi \Gamma : \pi,$$

ex

ex quo valore cognito innotescet summa sequentis seriei:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) + (23) + (47) + (71) \\ + (25) + (49) + (73) \end{array} \right\} \text{etc.} = \frac{1}{6} \Sigma,$$

qui ergo valor iam satis prope dabit valorem (1) = B. Quodsi simili modo in valorem tertii termini C = (2) inquirere velimus, talem expressionem:

$$S = \Gamma:0 + \text{cof. } 2\omega\Gamma:\omega + \text{cof. } 4\omega\Gamma:2\omega + \text{cof. } 6\omega\Gamma:3\omega + \dots + \text{cof. } 2\pi\Gamma:\pi$$

evolvere debemus, quae ut fractiones evitentur, duplicetur, ac singuli termini per series verticales sequenti modo exhibeantur:

$$2S = \Gamma:0 + 2\text{cof. } 2\omega\Gamma:\omega + 2\text{cof. } 4\omega\Gamma:2\omega + 2\text{cof. } 6\omega\Gamma:3\omega + \dots + 2\text{cof. } 2\pi\Gamma:\pi$$

()	2 + 2 cof. 2ω	+ 2 cof. 4ω	+ 2 cof. 6ω	. . .	+ 2 cof. 2π.
(1)	1 + cof. ω	+ cof. 2ω	+ cof. 3ω	. . .	cof. π.
(2)	+ 1 + cof. 3ω	+ cof. 6ω	+ cof. 9ω	. . .	+ cof. 3π.
(3)	1 + 1	+ 1	+ 1	. . .	+ 1.
(λ)	+ 1 + cof. 4ω	+ cof. 8ω	+ cof. 12ω	. . .	+ cof. 4π.
(1)	1 + cof. ω	+ cof. 2ω	+ cof. 3ω	. . .	+ cof. π.
(2)	+ 1 + cof. 5ω	+ cof. 10ω	+ cof. 15ω	. . .	+ cof. 5π.
(λ)	$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \text{cof.}(\lambda-2)\omega + \text{cof.}2(\lambda-2)\omega + \text{cof.}3(\lambda-2)\omega \dots \text{cof.}(\lambda-2)\pi. \\ + 1 + \text{cof.}(\lambda+2)\omega + \text{cof.}2(\lambda+2)\omega + \text{cof.}3(\lambda+2)\omega \dots \text{cof.}(\lambda+2)\pi. \end{array} \right.$				

§. 25. Hinc igitur formula (c) afficietur per 2; unde ergo si semisumma primi et ultimi subtrahatur, hic terminus prorsus e medio tolletur. Porro pro (1) superioris seriei summa erit = c, inferioris vero pariter = c, quemadmodum etiam semisummae primi et ultimi termini evanescent,

scunt, ita ut iste terminus pariter auferatur. At pro (2) series superior dat $1 + n$, inferior vero 1, hinc semisumma primi et ultimi ablata relinquet n . Pro sequente (3) superior series dat c , pariter ac inferior, ita ut iste terminus e medio tollatur. Eodem modo etiam in genere terminus (λ) e medio tolletur, siquidem semisumma primi et ultimi subtrahatur, nisi fuerit vel $\lambda - 2 = 2in$, vel $\lambda + 2 = 2in$, quippe quibus casibus summa sit $= n$.

§. 26. Quodsi ergo ponamus

$$\Sigma = \frac{1}{2}\Gamma:0 + \cos. 2\omega\Gamma:\omega + \cos. 4\omega\Gamma:2\omega + \cos. 6\omega\Gamma:3\omega \dots \dots + \frac{1}{2}\cos. 2\pi\Gamma:\pi,$$

existente $\omega = \frac{\pi}{n}$, ista quantitas per hanc seriem repraesentabitur:

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}n(2) + \frac{1}{2}n(2n-2) + \frac{1}{2}n(4n-2) + \frac{1}{2}n(6n-2) \\ + \frac{1}{2}n(2n+2) + \frac{1}{2}n(4n+2) + \frac{1}{2}n(6n+2) \end{array} \right\} \text{ etc.}$$

unde viciffem istius seriei

$$\left\{ \begin{array}{l} (2) + (2n-2) + (4n-2) + (6n-2) + (8n-2) \\ + (2n+2) + (4n+2) + (6n+2) + (8n+2) \end{array} \right\} \text{ etc.}$$

summa erit $= \frac{2}{n}\Sigma$; sicque hinc satis exade valor termini (2) = C definiri poterit, si modo pro n numerus satis magnus accipiat. Ita si sumamus $n = 12$, ut sit $\omega = \frac{\pi}{12} = 15^\circ$, atque computemus valorem huius formae:

$$\Sigma = \frac{1}{2}\Gamma:0 + \cos. 2\omega\Gamma:\omega + \cos. 4\omega\Gamma:2\omega + \cos. 6\omega\Gamma:3\omega \dots \dots + \frac{1}{2}\cos. 2\pi\Gamma:\pi,$$

quarum partium numerus est 13; huius seriei:

$$\left\{ \begin{array}{l} (2) + (22) + (46) + (70) + (94) + (118) \\ + (26) + (50) + (74) + (98) + (122) \end{array} \right\} \text{ etc.}$$

summa erit $= \frac{1}{6}\Sigma$.

§. 27. Nunc iam sine pluribus ambagibus similes formulas pro sequentibus terminis (3); (4); (5); etc. exhibere poterimus. Ita pro termino (3) = C, sumto n numero satis magno, positoque $\frac{\pi}{n} = \omega$, investigetur valor huius expressionis:

$$\Sigma = \frac{1}{2}\Gamma:0 + \cos. 3\omega\Gamma:\omega + \cos. 6\omega\Gamma:2\omega + \cos. 9\omega\Gamma:3\omega \dots \dots + \frac{1}{2}\cos. 3\pi\Gamma:\pi,$$

atque hinc consequemur hanc summationem:

$$\left\{ \begin{array}{l} (3) + (2n-3) + (4n-3) + (6n-3) \\ + (2n+3) + (4n+3) + (6n+3) \end{array} \right\} \text{etc.} = \frac{2}{n} \Sigma.$$

Ita si fuerit $n = 12$, ideoque $\omega = 15^\circ$, habebimus:

$$\left\{ \begin{array}{l} (3) + (21) + (45) + (69) \\ + (27) + (51) + (75) \end{array} \right\} \text{etc.} = \frac{1}{6} \Sigma.$$

§. 28. Eodem modo pro termino sequente (4) = D in subsidium vocetur ista forma:

$$\Sigma = \frac{1}{2}\Gamma:0 + \cos. 4\omega\Gamma:\omega + \cos. 8\omega\Gamma:2\omega + \cos. 12\omega\Gamma:3\omega \dots \dots + \frac{1}{2}\cos. 4\pi\Gamma:\pi,$$

unde sequens oriatur summatio

$$\left\{ \begin{array}{l} (4) + (2n-4) + (4n-4) + (6n-4) + (8n-4) \\ + (2n+4) + (4n+4) + (6n+4) + (8n+4) \end{array} \right\} \text{etc.} = \frac{2}{n} \Sigma.$$

Hinc si sumamus $n = 12$ et $\omega = 15^\circ$, summatio inde orienda erit:

$$\left\{ \begin{array}{l} (4) + (20) + (44) + (68) + (92) \\ + (28) + (52) + (76) + (100) \end{array} \right\} \text{etc.} = \frac{1}{6} \Sigma.$$

Ex his iam satis intelligitur, si definire debeat in genere character (λ), computandam ante omnia esse formam:

$$\Sigma = \frac{1}{2}\Gamma:0 + \cos. \lambda\omega\Gamma:\omega + \cos. 2\lambda\omega\Gamma:2\omega \dots \dots + \frac{1}{2}\cos. \lambda\pi\Gamma:\pi,$$

tum

tum vero hinc istam summationem obtineri:

$$\left\{ \begin{aligned} &(\lambda) + (2n - \lambda) + (4n - \lambda) + (6n - \lambda) + (8n - \lambda) \\ &+ (2n + \lambda) + (4n + \lambda) + (6n + \lambda) + (8n + \lambda) \end{aligned} \right\} \text{etc.} = \frac{2}{n} \Sigma$$

Hinc ergo si capiatur $\lambda = n$, series hanc induet formam:

$$2(n) + 2(3n) + 2(5n) + 2(7n) + 2(9n) + 2(11n) + \text{etc.} = \frac{2}{n} \Sigma,$$

ficque orietur ista series satis simplex:

$$(n) + (3n) + (5n) + (7n) + (9n) + (11n) + \text{etc.} = \frac{1}{n} \Sigma,$$

in qua continetur insignis proprietates coefficientium (0); (1); (2); (3); etc., quorum naturam hic investigamus.

§. 29. Sin autem hic statuere velimus $\lambda = 2n$, series summata transibit in hanc formam:

$$(0) + 2(2n) + 2(4n) + 2(6n) + 2(8n) \text{etc.} = \frac{2}{n} \Sigma,$$

quae est nova series satis memorabilis pro inveniundo primo termino (0), pro qua igitur erit:

$$\Sigma = \frac{1}{2} \Gamma:0 + \text{cof. } 2\pi \Gamma:\omega + \text{cof. } 4\pi \Gamma:2\omega + \text{cof. } 6\pi \Gamma:3\omega \dots \dots + \frac{1}{2} \text{cof. } 2n\pi \Gamma:\pi,$$

qui cosinus cum omnes sint unitati aequales, erit

$$\Sigma = \frac{1}{2} \Gamma:0 + \Gamma:\omega + \Gamma:2\omega + \Gamma:3\omega + \Gamma:4\omega \dots \dots \frac{1}{2} \Gamma:\pi,$$

quae expressio prorsus convenit cum ea, quam supra §. 19. exhibuimus. Verum in serie, quae inde est deducta, ingens discrimen se exferit, cum hic primus terminus deberet esse duplo maior; huius autem discriminis causa in eo latet, quod in genere supposuimus summam seriei pro (0) esse nihilo aequalem, cum casu $\Gamma = 2n$ ista series

$$2 + 2 \text{ cof. } \gamma \omega + 2 \text{ cof. } 2 \gamma \omega + 2 \text{ cof. } 3 \gamma \omega + \text{etc.}$$

non evanescat, sed evadat $= 2(1 + n)$.

§. 30. His expositis fatis perspicuum est, quemadmodum pro quovis casu oblato, qui more vulgari in talem seriem:

$$\alpha + \beta \cos. \phi + \gamma \cos. \phi^2 + \delta \cos. \phi^3 + \varepsilon \cos. \phi^4 + \text{etc.}$$

converti potest, altera series ad usum astronomicum necessaria et per cosinus angulorum multipiorum procedens, quam hac forma repraesentavimus:

$$A + B \cos. \phi + C \cos. 2 \phi + D \cos. 3 \phi + E \cos. 4 \phi + \text{etc.}$$

formari debeat, idque ex sola indole functionis propositae, sine ulla integratione, dum totum negotium eo tantum redit, ut pro certis casibus, quibus statuitur vel $\phi = 0$, vel $\phi = \omega$, vel $\phi = 2\omega$, etc. valores ipsius functionis resolvendae definiantur, id quod plerumque sine ullo labore fieri potest. Ita si formula proposita fuerit $(1 - e \cos. \phi)^{-\frac{3}{2}} = \Gamma : \phi$, per universam Astronomiam frequentissime occurrens, statim patet fore:

$$\Gamma : 0 = (1 - e)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{1 - e \sqrt{1 - e}} \text{ et } \Gamma : \pi = (1 + e)^{-\frac{3}{2}};$$

at vero $\Gamma : \frac{\pi}{2} = 1$, ita ut perpetuo sit $1 = A - C + E - G + I$ etc. five $(0) - (2) + (4) - (6) + (8) - (10)$ etc. in infinitum $= 1$. Praeterea vero modus, quo hoc argumentum tradavimus, plurimas alias insignes proprietates suppeditavit, quibus determinatio singulorum terminorum non mediocriter sublevari potest.